

**T. C.**

**BİLECİK ŞEYH EDEBALİ ÜNİVERSİTESİ**

**FEN EDEBİYAT FAKÜLTESİ**

**MATEMATİK BÖLÜMÜ**

**LİSANS TEZİ**

EĞRİLER TEORİSİ

**HAZIRLAYAN**

Yaren ÇELİK

**DANIŞMAN**

Doç. Dr. Sıddıka ÖZKALDI KARAKUŞ

**Haziran 2018**

# **GİRİŞ**

Diferansiyel Geometrinin belki de en ilginç ve onu iyi temsil eden çalışma alanı eğriler teorisidir. Eğrilerin yerel özelliklerinin incelenmesi farklı ve önemli sonuçlar verir. Bu teorinin lineer ve non-lineer diferansiyel denklemler ve fizikte çok farklı uygulamaları vardır. Eğriler teorisinin en fazla kullanılan ve doğal yapısını temsil eden konularının başında ise Frenet denklemleri gelmektedir. Bu denklemler geometride oldukça elit bir statüde olup birçok faklı alanda kullanım yerine sahiptir. Bu formüller ilk önce 1852 yılında Frenet tarafından bulunmuş ve yayınlanmıştır. Ondan habersiz olarak Serret, 1851 yılında aynı formülleri hesaplamıştır. Bundan dolayı bu formüllere bugün her ikisinin adı verilerek Frenet-Serret formüleri olarak adlandırılır. IRn deki herhangi Frenet eğrisi ile bağlantılı olan dikkate değer iki eğri vardır. Bu eğrilerin ilki; küresel teğet göstergesidir. Bir Frenet eğrisinin küresel teğet göstergesinin yay uzunluğu yardımıyla, bu Frenet eğrisinin yeni parametrizosyonu, eğrinin özelliklerinin incelenmesinde kullanılır.

TEŞEKKÜR

Tez çalışmamın hazırlanması boyunca bilgilerini ve desteklerini esirgemeyen, bilimsel disiplin ve bakış açısı kazanmamı sağlayan değerli danışmanım Prof.Dr. Sıddıka ÖZKALDI KARAKUŞ’A lisans eğitimim süresince bana emeği geçen bütün Bilecik Şeyh Edebali Üniversitesi Matematik Bölümü öğretim üyelerine teşekkürü borç bilirim.

Her türlü imkânı sağlayan, sevgilerini ve güvenlerini hiçbir zaman esirgemeyen aileme saygılarımı ve teşekkürlerimi sunarım.

Yaren ÇELİK

Haziran, 2018

**İÇİNDEKİLER**

**İçindekiler**

[GİRİŞ 1](#_Toc513069086)

[TEŞEKKÜR 2](#_Toc513069087)

[1.EĞRİLER TEORİSİ 4](#_Toc513069088)

[1.1. EĞRİ 4](#_Toc513069089)

[1.2.PARAMETRE DEĞİŞİMİ 7](#_Toc513069090)

[1.3.DÜZLEMDE EĞRİLER 9](#_Toc513069091)

[1.4.BİR EĞRİNİN OSKÜLATÖR HİPERDÜZLEMLERİ 12](#_Toc513069092)

[1.5.EĞRİLİKLER, EĞRİLİK EKSENLERİ 13](#_Toc513069093)

[1.6.EĞRİLİK MERKEZLERİ VE EĞRİLİK KÜRELERİ 22](#_Toc513069094)

[Kaynakça 28](#_Toc513069095)

# **1.EĞRİLER TEORİSİ**

# **1.1. EĞRİ**

**Tanım 1.1.1:** nin açık bir aralığı olsun.

fonksiyonu diferansiyellenebilir ve regüler bir fonksiyon olmak üzere cümlesine de diferansiyellenebilir bir eğri denir. cümlesine eğrinin parametre aralığı, değişkeni eğrinin parametreleri denir.

fonksiyonlarına α eğrisinin koordinat fonksiyonları denir.

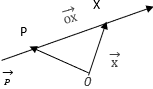
in koordinat fonksiyonları , ise eğrinin koordinatlarını bulalım.

diferansiyellenebilir bir eğri ise vektörüne α eğrisinin α(t) noktasındaki teğet (hız) vektörü denir.

için ise α eğrisine regüler eğri denir. Eğer noktasınan α eğrisi singülerdir denir.

**Örnek 1.1.1: (Doğru)**

şeklinde tanımlı eğriye P = () noktasından geçen ve doğrultmanı ) olan bir doğru denklemidir.



de P noktasından geçen ve doğrultmanı olan doğru d olmak üzere d üzerindeki X temsili nokta için veya = yazılabilir.

şeklindedir.

**Örnek 1.1.2: (Çember)** olmak üzere,

şeklinde tanımlı eğri de bir çemberdir.

**Örnek 1.1.3: (Elips)**

olmak üzere,

şeklinde tanım tanımlı de bir elipstir.

**Örnek 1.1.4: (Helis)**

diferansiyellenebilir bir eğridir.

Dolayısıyla için regülerdir.

**Örnek 1.1.5: (Cusp (Uç, Sivri, Çıkıntı))**

Diferansiyellenebilir bir eğri;

olmak üzere t = 0 için  noktasında t = 0 anında α eğrisi singülerdir.

**Örnek 1.1.6: (Düğüm)**

diferansiyellenebilir bir eğri

için ve regülerdir.

dır.

**Tanım 1.1.2:** bir eğri olsun. α fonksiyonu periyodik ise eğriye periyodik eğri denir. Yani olacak şekilde bir 0 varsa Bu özelliği sağlayan en küçük T değerine eğrinin periyodu denir.

**Örnek 1.1.7:**  a eğrisi için T = 2π için α (t + 2π) = α(t) olduğundan α eğrisinin periyodu T= 2πdir.

**Sonuç 1.1:**  ise eğri kendini keser. olmak üzere eğri bir eğri olup eğri için periyodik olma kapalı anlamına gelir.

**Tanım 1.1.3:**  eğrisi

fonksiyonu ile verilsin. α eğrisinin koordinat fonksiyonları olmak üzere

dir.

vektörüne noktasındaki hız vektörüdür.

Yani; ( =

**Örnek 1.1.8:**

**a)**

eğrisinin hız vektörünü bulunuz.

**b)**  , eğrisinin hız vektörünü bulunuz.

**Tanım 1.1.4:**  de bir eğrisi verilsin.

olarak tanımlı fonksiyona eğrisinin skaler hız fonksiyonu denir. sayısına α(t) noktasındaki skaler hızı denir.

**Örnek 1.1.9:**  (t,) eğrisinin t= 0, t =1, t = 2 için skaler hızını bulunuz.

(t,) α = (1, 2t)

skaler hız fonksiyonu

t = 0 için 1

t = 1 için

t = 2 için

**Tanım 1.1.5:** Hız vektörü birim ise yani  eğriye birim hızlı eğri denir.

**Not:** Birim hızlı eğriye sparametresiyle ifade edilebilir.

olmak üzere parametresine yay parametresi denir.

**Tanım 1.1.6:** Her noktada hız vektörü sıfırdan farklı olan eğriye regüler eğri denir. Her t için oluyorsa ise α ya regüler eğri denir. için veya regülerdir.

**Örnek 1.1.10:**

İki eğri olmak üzere; , (

()

=

=

**Örnek 1.1.11:** birim hızlı eğri ise dır. Gösteriniz.

birim hızlı

= 0

# **1.2.PARAMETRE DEĞİŞİMİ**

**Tanım 1.2.1:**

diferansiyellenebilir bir eğri olsun. bir açık alt aralığı olmak üzere;

diferansiyellenebilir bir fonksiyon

özelliklerini sağlıyorsa h fonksiyonuna parametre değişim fonksiyonu denir.

**Not:**

β eğrisine nın yönünü koruyan bir yeniden parametrizasyonu,

β eğrisine nın yönünü değiştiren bir yeniden parametrizasyondur.

**Teorem 1.2.1:** diferansiyellenebilir bir eğri ve olsun.

Parametre değişim fonksiyonu ise

**İspat:**

dir.

ise

**Sonuç 1.2:** de bir eğrisinin bir noktasında birden fazla teğet vektörü vardır ve bu teğet vektörleri lineer bağımlıdır.

**Teorem 1.2.2:**de regüler bir M eğrisi ve M nin

parametresi verilsin. nın 1-boyutlu alt uzayıdır.

, M nin parametrelenmesinden bağımsızdır.

**İspat:**

olmak üzere ;

**Tanım 1.2.2:,** diferansiyellenebilir bir eğri olsun. olmak üzere; sayısına eğrisine dan u ya yay uzunluğu denir.

**Örnek 1.2.1:** , = (2t,0, t) eğrisinin t=0 dan t=1’e kadar olan yay uzunluğunu bulunuz.

**Örnek 1.2.2:** = (3cost,3sint,2) eğrisinin aralığındaki yay uzunluğunu hesaplayınız.

)

=

# **1.3.DÜZLEMDE EĞRİLER**

s yay parametresi ile verilmiş düzlemsel bir eğri olsun. olmak üzere dir.

**Tanım 1.3.1:** n(s)vektörü α eğrisinin noktasındaki birim normal vektör olmak üzere vektörünün saat yönünün tersinde döndürülmesiyle elde edilir.

( dir.

**Not:** birim hızlı düzlemsel bir eğri olmak üzere

O halde t(s) ve vektörleri birbirine diktir. Dolayısıyla dir.

****

**Tanım 1.3.2: ,**  eğriliği ile tanımlanır.

**Not:**

her iki tarafı n(s) ile çarpalım.

dir.

**Tanım 1.3.3:** Regüler eğrisi verilsin. eğrisinin noktasındaki eğriliği

,

saat yönünün tersine lik dönme yaptıran matris ile tanımlanır. pozitif fonksiyona nın eğrilik yarıçapı adı verilir.

**Teorem 1.3.1: ,**  regüler eğrisi verilsin. eğrisinin eğriliği

dir.

**Teorem 1.3.2: ,** bir regüler eğri de eğrisinin bir parametrizosyonu olsun. O halde nın bir  **,** sparametrelendirilmesi için olmak üzere

dir.

**Frenet Formülleri:**

**Tanım 1.3.4:**  de birim hızlı bir eğri olsun. vektörü α nın birim teğet vektör olmak üzere olduğunu biliyoruz. sistemi ortonormal bir sistemdir.

dir.

0

dır.

Matris gösterimi:

Frenet formülleri matris gösterimidir.

**UZAYINDA EĞRİLER**

**SERRET -FRENET VEKTÖRLERİ:**

de bir eğrisi koordinat komşuluğu verilsin.M nin  noktasındaki hız vektörü ise deki Öklid koordinat sistemi olmak üzere; yazılabilir. fonksiyonu birebir ve örten olduğundan dır.D, de kovaryant türev operatörü olmak üzere dönüşümünden alt cümlesine kısıtlarsak;

Şeklinde ifade edilir. olmak üzere; dır.

dır.

Benzer şekilde devam edilirse;

elde edilir.

Bu türev vektör alanlarına eğrinin yüksek mertebeden türevleri denir. Bu türev vektör alanlarından r tanesinin maksimal lineer bağımsız vektör sistemi olduğunu kabul edelim. Yani; olmak üzere; lineer bağımsız olsun ve sağlansın. Bu durumda α nın temel çatısı denir. S sistemine Gram – Schmidt metodu uygularsak;

Sistemi ortogoneldir.

,,) sistemi elde edilir.

**Tanım 1.3.5:**de bir M eğrisi koordinat komşuluğu ile verilsin. temel çatısından elde edilen ,,) ortonormal vektör alanları sistemine M nin α(t) noktasındaki Serret – Frenet, r ayaklısı veya kısaca Frenet çatısı denir. Burada vektörlerinin her birine Frenet vektör denir.

**Örnek 1.3.1:** , eğrisinin Frenet 2 ayaklısını bulunuz.

nın temel çatısı dir.

dir.

Frenet 2-ayaklı

# **1.4.BİR EĞRİNİN OSKÜLATÖR HİPERDÜZLEMLERİ**

**Tanım 1.4.1:** de koordinat komşuluğu ile verilen bir eğri olsun. Eğrisinin Frenet r-ayaklısı ,,); r ≤ n olsun. olmak üzere ; vektör uzayına (hiperdüzlem) , α nın α(s) noktasındaki p. Oskülatör hiperdüzlemi denir.

Özel olarak halinde uzayı determinant yardımıyla kolayca bulunabilir. Hiperdüzleminde temsili bir nokta Y olsun o halde dir. Bu ise ise nin lineer bağımlı olması demektir.

Yani; dır.

**Not:** M nin bir noktasındaki düzlemi olsun. M eğrisi yüksek mertebeden lineer bağımsız türev vektörleri olsun. Bu lineer bağımsız vektörlere Gram – Schmidt metodu gereği yazılabilir. Bundan dolayı; ifadesindeki uzayı ile uzayları eşittir.

Oskülatör düzleminin denklemi;

**Örnek 1.4.1:** , eğrisinin Oskülatör hiperdüzlemini bulunuz.

Hiperdüzlemi temsili nokta Y olsun. Y= (

# **1.5.EĞRİLİKLER, EĞRİLİK EKSENLERİ**

**Tanım 1.5.1:** de koordinat komşuluğu ile verilen bir eğri olsun. olmak üzere noktasındaki Frenet 2 – ayaklısı olarak verilsin. olmak üzere;

şeklinde tamamlanan fonksiyona M eğrisinin Frenet eğrilik fonksiyonu sayısında M eğrisinin noktasındaki i. Frenet eğriliği denir.

**Teorem 1.5.1:** de koordinat komşuluğu ile verilen bir eğri olsun. yay parametresi olmak üzere Frenet ayaklısı olarak verilsin. Eğrinin noktasındaki eğrilik fonksiyonları ise; ;

Eşitlikleri elde edilir.

**UZAYINDA EĞRİLER**

**Frenet formülleri ve eğrilikler:**

**Teorem 1.5.2:** uzayında bir M eğrisi koordinat komşuluğu ile verilsin. M nin parametresi eğrinin yay parametresi olsun. Bu durumda

(T: Eğrinin asli teğet vektör alanı)

(N: Eğrinin asli normal vektör alanı)

(N: Eğrinin asli bi-normal vektör alanı)

**İspat:**birim hızlı bir eğri olduğundan dir.

⇒ dir.

Ayrıca; B= T x N olarak tanımlanırsa ortonormal sistemi elde edilir.

Gerçekten;

Ayrıca; = = .. = 1 dir.

**Tanım 1.5.2:**için şeklinde tanımlı fonksiyonuna α eğrisinin eğrilik fonksiyonu reel sayısında α nın α(s) noktasındaki eğriliği denir.

**Sonuç:**  için dır. T, N, B Frenet vektörlerinin vektörleri ile arasındaki ilişkiler

=+

=+

=+ yazılabilir.

=

=

= ve ⟹ N= ⟹ dir.

=

=

=

= =

=

=

=

= = 0

=

**Teorem 1.5.3:**  eğrisi eğrilikle ve burulmalı birim hızlı bir eğri olsun.

Bu durumda eğri Frenet vektörleri T, N, B için

= K. N

=

=

Veya

eşitlikleri geçerlidir. Bu formüllere Frenet formülleri denir.

**Not:**

Frenet vektörleri

Eğrilikleri

Frenet elemanları dir.

**Teorem 1.5.4:** de birim hızlı bir eğri, nın eğriliği ve burulması için

dir.

**İspat:**

birim hızlı bir eğri olmak üzere

T(s)= dir.

dir.

olduğundan

dir.

=

olmak üzere,

dür.

**Örnek 1.5.1:**  Olmak üzere a, b, c sabitleri için Dairesel helis eğrisi verilsin.

1. Eğrisinin birim hızlı olduğunu gösteriniz.
2. T, N, B Frenet vektörlerini bulunuz.
3. K eğriliği ve τ burulmasını bulunuz.

**i)**

Olduğundan eğri birim hızlıdır.

**ii)**



Frenet formülleri:

= K. N

=

=

**Örnek 1.5.2:**

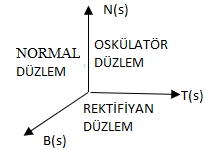
1. Regüler eğri olup olmadığını bulunuz.
2. T, N, B, K, 𝛕 Frenet elemanlarını bulunuz.
3. Düzlemsel olup olmadığını bulunuz.

Regüler eğri ve birim hızlı eğridir.

=

1. ise eğri düzlemsel eğrilerdir.

**ÖZEL DÜZLEMLER**



**Tanım 1.5.3:** düzlemine α eğrisinin α(s) noktasındaki oskülatör düzlemi denir.

Oskülatör düzlem üzerindeki herhangi bir nokta X olmak üzere;

de

dır.

**Tanım 1.5.4:** düzlemine α eğrisinin α(s) noktasındaki normal düzlemi denir.

Normal düzlem üzerindeki herhangi bir nokta X olmak üzere;

de

dır.

**Tanım 1.5.5:** düzlemine α eğrisinin α(s) noktasındaki rektifiyan düzlemi denir.

Rektifiyan düzlem üzerindeki herhangi bir nokta X olmak üzere;

de

dır

eğriliklerinin geometrik yorumu;

birim hızlı bir eğri, noktasında ki Frenet elemanları olsun.

h = s- olmak üzere α nın noktasının komşuluğnda Taylor Seri Açılımı yapılırsa;

+

Burada;

=T () =

= () =

. olur.

Buna göre;

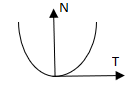
ın öyle bir komşuluğunu şeçelim ki h≠0, ≠0 .

Fakat; = … =0 olsun.

Bu durumda;

nün çatısına göre koordinatları olmak üzere

Yani; α eğrisinin noktasının bir komşuluğunda, eğrinin oskülatör düzlemindeki izdüşümü bir paraboldür. olduğu bu parabolün kolları ın pozitif yönünde bükülmüştür.



sayısı büyüdükçe parabolün kolları vektörüne yaklaşır. Yani teğeti olan dan uzaklaşır.

sayısı küçüldükçe parabolün kolları vektöründen uzaklaşır. Yani; teğeti olan vektörüne yaklaşır. O halde; sayısının büyüklüğü eğrinin α(s) noktasında teğet doğrultusunda ne kadar ayrıldığının (saptığının) bir ölçüsüdür.

**Sonuç:** için eğri bir doğruya yaklaşır. halinde eğri bir doğrudur.

Şimdi; ın öyle bir komşuluğunu seçelim ki ,

Fakat olsun.

Bu eğri üç boyutlu uzayda noktasından geçen bir eğridir.

olan eğridir. olmak üzere, için bu eğri noktasındaki oskülatör düzlemde yatar, Aksi halde bu düzlemden uzaklaşır. O halde torsiyonu eğrisini bir düzlemden ne kadar ayrıldığını ölçer.

için eğri düzlemseldir.

**Teorem 1.5.4:**  de bir M eğrisi koordinat komşuluğu ile eğrinin yay parametresi olmak üzere, eğrinin bir doğru olması için K=0 olmasıdır.

**İspat:**: K=0 olsun. K = dır.

dır.

T(s)= sabit = bulunur.

Eğri yay parametresi ile verildiğinden

T(s) =  dir.

dir.

: Kabul edelim ki M bir doğru olsun. M nin vektörel denklemi dir.

Ya da; yazılabilir.

Burada; için yazılabilir.

T(s)

**Teorem 1.5.5**: de bir M eğrisi koordinat komşuluğu ile eğrinin yay parametresi olsun. M eğrisinin düzlemsel olması için gerek ve yeter şart τ=0 olmasıdır.

**İspat**:: Kabul edelim ki M bir düzlemsel olsun.olmak üzere, olacak şekilde bir p noktası ve sabit vektörü vardır. Bu ifadede s ye göre türev alınırsa

;

;

eğrisinin üzerinde bulunduğu düzleme dik olduğundan Sp düzleminde değildir

⇒ dir.B= ve ve olduğundan B(s)

B(s) yazılabilir.

Kabul edelim ki olsun. dır.

için;

)

Eğer bu sağlanıyorsa; αϵ dir.

Bir; fonksiyonunu tanımlayalım.

S ye türev alalım.

şeklinde sabit bir fonksiyondur.

için;

S= 0 için

= 0,

O halde ; a = 0

için; = 0

dir. .

**Tanım 1.5.6:** α: (a, b) → bir regüler eğri olmak üzere α yay parametresi ile ifade edilen birim hızlı eğrisi : (c, d) → olsun. s(t) yay uzunluğu fonksiyonu olmak üzere; α(t)=(s(t)) yazılabilir. eğrisinin Frenet elemanları olsun.

O halde;

**NOT:** α(t)=(s(t)) için

olduğundan dır.

**Teorem 1.5.6:** α:(a, b) → , hızlı bir regüler olsun.

=

= olur.

**İspat**: α nın yay parametresi s = s(t) olsun.

için

için

için

**Teorem 1.5.7:** Bir regüler α eğrisinin hızı ve ivmesi için

olur.

**İspat:** α eğrisinin birim hızlı parametresizyonu olmak üzere

α(t)=(s(t))

dir.

**Teorem 1.5.8:** α:(a, b) → bir regüler olsun. k≠0

, , , ,

**İspat:** α bir regüler eğri ise

dir.

)

=

O halde;

dir.

Olmak üzere;

=

dır.

**Örnek 1.5.3:** r∈Frenet düzlemlerini bulunuz?

(t)=(-rsint,rcost,0)

(t)=(-rcost,-rsint,0)

=r≠0 olduğundan birim değildir.

=

Oskülatör düzlem ⟺

y=(

Normal düzlem ⟺

y=(

Rektifiyan düzlem ⟺

y=(

# **1.6.EĞRİLİK MERKEZLERİ VE EĞRİLİK KÜRELERİ**

Bir eğrisinin bir noktasında, M ile sonsuz yakın üç ortak noktası olan kürelerin merkezlerinin geometrik yerini gösterelim.

**Teorem 1.6.1:**M eğrisi koordinat komşuluğu ile verilsin. M nin noktasındaki

Frenet üç ayaklısı; olmak üzere M ile sonsuz yakın üç ortak noktası olan kürelerin merkezlerinin geometrik yeri;

+ dir.

Burada: dır.

**İspat**: koordinat komşuluğu, M eğrisi için yay parametresi olarak verilsin. M ile sonsuz yakın üç ortak noktası olan kürenin merkezi ve yarıçapı r olsun.

Bu durumda; fonksiyonunu ele alalım. noktasında

küreleri ile M eğrisinin sonsuz yakın üç ortak noktası olması için, olmalıdır.

Buna göre; dir.

Diğer taraftan baz ise,

= ; yazılabilir.

dir.

+ ;

+ dür.

**Sonuç 1.6.1:**  noktasında sonsuz yakın üç ortak nokta olan kürelerin merkezleri bir doğru üzerindedir.

+ olup;

parametresi ile bu denklem (Eğrilik merkezi) noktasından geçen ve vektörüne paralel olan bir doğru gösterir.

**Tanım 1.6.1:**M eğrisiyle M noktasında sonsuz yakın dört ortak noktası olan küreye, M nin noktasındaki oskülatör küresi veya eğrilik küresi denir.

**Teorem 1.6.2:** M eğrisi koordinat komşuluğu ile verilsin. noktasındaki oskülatör kürenin merkezi ise;

+ dir.

, dir.

**İspat:** noktasındaki oskülatör kürenin merkezi ve yarıçapı r olsun.

O halde; fonksiyonunu ele alalım.

noktasındaki oskülatör küre ile eğrinin sonsuz yakın dört ortak noktası olduğundan

ve dır.

olmak üzere;

dır.

dir.

**Sonuç 1.6.2**: M eğrisinin noktasındaki Oskülatör kürenin yarıçapı r ise

dir.

**Örnek 1.6.1: ,**  eğrisinin α() de eğrilik merkezi, eğrilik yarıçapı ve eğrilik eksenini bulunuz.

Birim hızlı değildir.

Eğrilik yarıçapıdır.

Eğrilik merkezi;

+2(0,-1,)

Eğrilik ekseni;

+

**Tanım 1.6.2:** M eğrisi ve p- hiperküresi verilsin. Eğer alt cümlesi ise M ye in bir p- hiperküresel eğri denir .Burada; n=3, p=1 halinde M eğrisi bir çember veya çember yayıdır.

**Teorem 1.6.3:** , O merkezli bir küre ve eğrisiverilsin.

M eğrisinin koordinat komşuluğu için yay parametresi olsun.

M nin noktasındaki Frenet 3 ayaklısı olmak üzere;

dir. için olduğundan nin yarıçapı r olmak üzere

Bu eşitlikte s’ye göre türev alınırsa

2 dir.

Son eşitlikten tekrar türev alalım.

dir.

den tekrar türev alınırsa

dir.

**Teorem 1.6.4**: O merkezli bir küre olsun. Eğer M ise M eğrisinin her noktasındaki oskülatör küre dir.

**İspat:**  noktasındaki Oskülatör kürenin olmak üzere

+ dir.

M olduğundan bir önceki teoremden

dir.

O halde; +

Yazılabilir. Diğer yandan

ve olduğundan

+

den

O halde dir.

**Teorem 1.6.5:**M eğrisi koordinat komşuluğu ile verilsin. olmak üzere; için noktasındaki Oskülatör kürenin yarıçapı sabittir.⟺ Oskülatör kürenin merkezleri aynıdır.

**İspat:**  noktasındaki Oskülatör kürenin yarıçapı ise dir.

Eğer r(s) sabit ise; dır.

değeri yerine yazılırsa

elde edilir.

Diğer taraftan;

+ dir.

=

Bu eşitlik uygulandığında

dır.

için

dan

S ye göre türev alınırsa

2 ,

**Teorem 1.6.6:** M eğrisi koordinat komşuluğu ile verilsin. olsun.bir küresel eğridir. ⟺ Oskülatör kürenin merkezleri aynıdır.

**Teorem 1.6.7:** M eğrisi koordinat komşuluğu ile verilen birim hızlı bir eğri olsun.

olsun.bir küresel eğridir. ⟺

# **Kaynakça**

Hacısalihoglu, H. H. (1998). *Diferensiyel Geometri.* Ertem Matbaası.

Sabuncuoğlu, A. (2006). *Diferansiyel Geometri .* Ankara: Nobel Yayın .

Yüce, S. (2013). *Diferansiyel Geometri .* İstanbul: Sürat Yayınları.